

1) Necht jsou dány funkce

2009/1

$$F_1(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \quad \text{a} \quad F_2(x) = -x.$$

- Určete definiční obor funkce F_1 .
- Rozhodněte, zda existuje reálná konstanta c taková, aby pro všechna $x \in (-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10})$ (tj. pro libovolné x z jistého vhodného okolí počátku) platilo $F_1(x) = F_2(x) + c$. V kladném případě vyhovující číslo c najděte, v záporném případě vysvětlete, proč požadované číslo c neexistuje.
- Zjistěte, kolik existuje tečen grafu funkce F_1 , které jsou kolmé k přímce $p: 2x + 2y - 3 = 0$. Své tvrzení zdůvodněte.

2) Necht je dán polynom

$$P(x) = x^7 - x^6 - 13x^5 - x^4 + 44x^3 + 50x^2 + 40x + 24.$$

- Najděte dvojici normovaných polynomů Q a R , pro něž platí

$$P(x) = Q(x) \cdot R(x),$$

přičemž polynom Q obsahuje všechny celočíselné kořeny (včetně případných násobností) polynomu P .

- Najděte všechny racionální kořeny polynomu R . Své tvrzení zdůvodněte.
- Určete počet reálných kořenů polynomu R . Své tvrzení zdůvodněte.
- Najděte alespoň jeden polynom $\bar{R}$ s celočíselnými koeficienty, jehož kořeny jsou převrácenými hodnotami kořenů polynomu R .

3A) Označme k křivku, kterou v Gaussově rovině tvoří obrazy všech komplexních čísel z , pro něž platí

$$|z + 1 - 4i| = 2|z + 1 - i|.$$

- Zjistěte druh křivky k a najděte všechny charakteristiky nutné k jejímu přesnému určení. Výpočet doplňte věrným znázorněním křivky k v Gaussově rovině. Bude stačit náčrt k , ve kterém přesně popíšete její polohu a důležité rozměry.
- Vypočítejte délku úsečky, jejíž krajní body tvoří průsečíky křivky k s imaginární osou Gaussovy roviny.
- Vyšetřete, co je množinou M všech bodů v Gaussově rovině, ze kterých je křivku k vidět pod pravým úhlem. Své tvrzení náležitě dokažte.

2009/2

3B) Nechť je dána jistá úsečka délky d ($d \in \mathbb{R}^+$) a kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, které mají společné právě dva body A a B . Sestrojte úsečku K_1K_2 tak, aby platilo $K_1 \in k_1$, $K_2 \in k_2$, $A \in K_1K_2$, $K_1 \neq A \neq K_2$ a $|K_1K_2| = d$.

- Udělejte náčrt a rozbor, запиšte postup konstrukce. Vlastní rys provádět nemusíte.
- Diskusi proveďte pouze kvalitativně. Tzn. uveďte a zdůvodněte, jaký počet řešení může daná úloha mít. Závislost počtu řešení úlohy na rozměrech a vzdálenostech zadaných útvarů (tj. r_1 , r_2 a $|S_1S_2|$) diskutovat nemusíte.
- V závislosti na rozměrech a vzdálenostech zadaných útvarů (tj. r_1 , r_2 a $|S_1S_2|$) najděte největší možnou hodnotu d , pro níž má uvažovaná úloha alespoň jedno řešení. Pro tuto maximální možnou hodnotu d zjistěte rovněž přesný počet řešení úlohy.

4A) V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnici

$$6 \cdot 9^{2 \cdot \log x} - 13 \cdot 6^{\log x^2} + 6 \cdot 16^{\log |x|} = 4 - \frac{(\cot^2 x - \tan^2 x) \sin^2 2x}{\cos 2x}.$$

4B) V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnici

$$\log_5 \sqrt[3]{x} + \log_5 \sqrt[8]{x} + \dots + \log_5 \sqrt[n^2+2n]{x} + \dots = \frac{3}{8}.$$

1. Uvažujme rovnici

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 2 = 0.$$

2012/1
(1)

- (a) Vyřešte v $\mathbb{C}$ rovnici (1) a všechny její kořeny věrně znázorněte v Gaussově rovině.

Ten kořen, který má největší absolutní hodnotu, označme z_0 . Poté postupně značme z_1, z_2 (a případně dále) ostatní kořeny rovnice (1) tak, aby n -úhelník, který obrazy všech kořenů rovnice (1) v Gaussově rovině tvoří, byl popsán obvyklým způsobem, tj. proti směru chodu hodinových ručiček.

- (b) Vypočtete obsah n -úhelníku tvořeného obrazy všech kořenů rovnice (1) a rozhodněte, zda mu lze opsat kružnici. V kladném případě určete její střed a poloměr, v záporném případě vysvětlete, proč uvažovaný n -úhelník kružnici opsanou nemá. O jaký n -úhelník se jedná?

- (c) Vyšetřete, co je v Gaussově rovině množinou všech komplexních čísel z , pro něž platí

$$|z - z_1| = |z - z_2|.$$

- (d) Dokažte, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\left(z_1^k + \frac{1}{z_1^k} \right) \in \mathbb{R}.$$

- (e) Najděte reciprokou rovnici nejnižšího možného stupně s celočíselnými koeficienty, jejímž jedním z kořenů je číslo $2z_2$. Hledanou rovnici upravte do tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

2A. V rovině je dána přímka $d: y = \frac{65}{8}$ a body $F = [3; \frac{63}{8}]$ a $A = [2; 14]$.

- (a) Najděte rovnici paraboly p , která má řídící přímku d a ohnisko F . Určete její vrchol a průsečíky se souřadnicovými osami. Výpočet doplňte věrným náčrtem této paraboly při správném umístění v soustavě souřadnic.
- (b) Určete rovnice všech přímek, které prochází bodem A a s parabolou p (z předchozí části úlohy) mají společný právě jeden bod. Pro každou vyhovující přímku zjistěte také souřadnice toho bodu, který současně leží na této přímce i na parabole p .
- (c) Vypočtete obsah útvaru, který je vymezen parabolou p (z části (a) této úlohy) a jejími tečnami vedenými bodem A . Výpočet doplňte věrným náčrtem uvažovaných útvarů při správném umístění v soustavě souřadnic. Útvar, jehož obsah máte vypočítat, v obrázku vyšrafujte.

2B. Necht' je dána kružnice $k(S; r)$, přímka p a bod A .

(a) Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $B \in p$ a $C \in k$. Proved'te

- náčrt,
- rozbor,
- kvalitativní diskusi v obecném případě (tj. uveďte a zdůvodněte, jaký počet řešení může daná úloha mít; výpočet zjišťující, jakým způsobem závisí počet řešení úlohy na polohách a rozměrech zadaných útvarů, dělat nemusíte),
- zapište postup konstrukce.

Ve zbývajících částech úlohy předpokládáme speciální polohu, kdy $p \parallel AS$.

- (b) Narýsujte všechna řešení úlohy v situaci, ve které pro zadané útvary dále platí $r = 3$ cm, $|AS| = 6$ cm a $|Ap| = 4$ cm.
- (c) V případě, že navíc $|Ap| = r \cdot \sqrt{2}$, vypočtete délku úsečky AS (v závislosti na jediném parametru r), pro kterou má úloha jediné řešení. Najděte všechny vyhovující délky $|AS|$.

3A. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici

$$9^x - 3^{(x+A)} - 3^{(x+B)} \geq C,$$

kde

$$A = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 2z}{z}, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} \quad \text{a} \quad C = \log_2 x \cdot \log_x \frac{1}{4} - [\log_2(32x) - \log_4 x^2]^2.$$

3B. Mějme šachovnici, která je rozdělena na 8×8 shodných čtvercových polí.

- (a) Předpokládejme, že celá šachovnice tvoří velký čtverec o straně délky $a = 8$ dm. Celou tuto šachovnici chceme zakrýt pomocí čtyř shodných kruhových ubrusů (tj. každý její bod musí být „přikryt“ alespoň jedním z ubrusů). Jaký nejmenší poloměr r může mít každý z těchto kruhů? Popište i způsob pokrytí šachovnice pomocí čtyř kruhů o nalezeném poloměru r . Rovněž zdůvodněte, proč by pomocí menších kruhů již celou šachovnici zakrýt nešlo. Ubrusy nelze rozstříhovat či jinak dělit na menší části.
- (b) Pouze v této části uvažujeme upravenou šachovnici tak, že z ní odřízneme dvě protější rohová pole (tj. pole, která leží na stejné úhlopříčce velkého čtverce, který celá šachovnice tvoří), tzn. představuje ji zbylých 62 polí - čtverečků o straně délky a . Rozhodněte, zda je možné celou tuto šachovnici zaplnit (tj. pokrýt každé její pole) pomocí 31 obdélníkové destičky, má-li každá z nich délky stran a a $2a$ a máme-li dovoleno každou z nich klást přesně na dvě pole naší šachovnice (tj. bez přesahu na jiné pole). Destičky přitom nelze lámat na menší díly a při skládání na šachovnici se nesmí překrývat. V kladném případě udejte příklad vyhovujícího pokrytí, v záporném případě zdůvodněte, proč požadované pokrytí neexistuje.
- (c) Náhodně vybereme dvě políčka na šachovnici a postavíme na ně dvě věže. Jaká je pravděpodobnost, že se budou vzájemně ohrožovat? Výsledek vyjádřete zlomkem v základním tvaru.
- (d) Kolika způsoby lze na šachovnici rozmístit 8 nerozlišitelných věží tak, aby se žádné dvě z nich neohrožovaly? Dvě rozmístění považujeme za různá, liší-li se polohou alespoň jedné věže. Šachovnici navíc uvažujeme jako pevnou se standardně označenými poli, tzn. dvě rozmístění, která bychom získali pomocí nějaké symetrie (např. pomocí otočení celé šachovnice) také považujeme za různá.
- (e) Kolika způsoby lze na této šachovnici provést tah koněm? Pojmeme tah v této úloze rozumíme uspořádanou dvojici polí: výchozí pole (odkud se táhne) a koncové pole (kam se táhne). Dva tahy považujeme za různé, pokud se liší alespoň v jednom poli (výchozím či koncovém). Zejména tedy považujeme za různé dva tahy, které tvoří stejná dvě pole ale v opačném pořadí (tj. tah tam je jiný než tah zpět). Také nyní šachovnici uvažujeme jako pevnou se standardně označenými poli, tzn. dva tahy, které bychom získali pomocí nějaké symetrie (např. pomocí otočení celé šachovnice) opět považujeme za různé.

1. Necht' je dána rovnice

$$px^2 - 2(1+p^2)xy + 4py^2 + (1-p)x + 2(1-p)y - 1 = 0$$

2017

s parametrem $p \in \mathbb{R}$ a reálnými neznámými x a y .

- Dokažte, že zadaná rovnice pro každé $p \in \mathbb{R}$ určuje singulární kuželosečku.
- V závislosti na hodnotě parametru p vyšetřete asymptotické směry uvažované kuželosečky. Pro příslušnou hodnotu parametru zjistěte vždy počet asymptotických směrů a jejich tvar.
- Najděte hodnotu parametru p , pro kterou tuto kuželosečku tvoří 2 navzájem kolmé přímky. Určete jejich rovnice a střed kuželosečky. Dokažte, že tato situace nastane pro jedinou hodnotu parametru p .
- Klasifikujte studovanou kuželosečku ve všech případech, kdy má právě jeden asymptotický směr. Pro každou z vyhovujících hodnot parametru p zjistěte, čím je kuželosečka v daném případě tvořena a je-li bodově reálná, najděte též rovnice útvarů, které ji vytváří.

2A. V $\mathbb{C}$ vyřešte rovnici

$$4x^8 - 4x^7 + 17x^6 - 13x^5 + 13x^3 - 17x^2 + 4x - 4 = 0.$$

2B. V $\mathbb{R}^3$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \frac{8 \cdot \sqrt[3]{2x-6}}{2^y} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4x+\frac{3}{4}}, \\ \log_3(x^2 - 4) - \log_3(2 - x) &= 4 \log_9 \sqrt{6z - 2}, \\ (3 + 2\sqrt{2})^{\frac{y}{2}} + (3 - \sqrt{8})^z &= 6. \end{aligned}$$

3A. Uvažujme množinu

$$M = \{1; 2; 3; \dots; 2017\}.$$

- Jaký nejmenší počet čísel z M musíme vybrat, abychom měli jistotu, že mezi vybranými čísly existují taková
 - 3 čísla, jejichž součet je dělitelný třemi,
 - 2 čísla, jejichž součet je dělitelný devíti?

U každé části uveďte též příklad podmnožiny, který ukazuje, že nemusí stačit vybrat menší počet prvků, než uvádíte.

- Jaký největší počet čísel z M lze vybrat tak, aby součin žádných tří z nich nebyl dělitelný číslem 27? Opět uveďte příklad vyhovující podmnožiny a zdůvodněte, proč nemůže mít větší počet prvků.
- Určete počet všech palindromů (tj. aspoň dvojčíferných čísel, která se čtou stejně zleva i zprava) v množině M .

Svá tvrzení ve všech částech úlohy dostatečným způsobem zdůvodněte.

3B. Uvažujme množinu

$$M = \{1; 2; 3; \dots; 2017\}.$$

- Najděte v M největší prvočíslo. Současně dokažte, že vámi uváděné číslo je skutečně prvočíslem.
- Najděte v M největší číslo, které má v $\mathbb{N}$
 - právě 3 dělitele,
 - právě 4 dělitele.
- Určete v M počet všech čísel, která mají v $\mathbb{N}$
 - právě 5 dělitelů,
 - právě 14 dělitelů.
- Najděte v M nejmenší číslo, které má v $\mathbb{N}$ právě 16 dělitelů.

Svá tvrzení ve všech částech úlohy dostatečným způsobem zdůvodněte.

1A. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$23 \mid (4 \cdot 16^n + 19^{2n+1}) .$$

(4 body)

1B. Vypočtete, jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi kostkami padne součet 10? Každá kostka má šest stěn a je spravedlivá, tzn. na jakoukoliv stěnu může padnout se stejnou pravděpodobností. Výsledek vyjádřete zlomkem v základním tvaru. (4 body)

2A. Určete všechny hodnoty parametru $v \in \mathbb{R}$, pro které bude mít rovnice

$$vx^2 + 2v(1-x) = 8 - 3x^2$$

právě dva různé reálné kladné kořeny. Nemusíte tedy hledat tvar množiny kořenů zadané rovnice v závislosti na hodnotách parametru v . (6 bodů)

2B. Pomocí nalezení racionálních kořenů polynomu

$$F(x) = 2x^6 - 6x^5 + \frac{3}{2}x^4 + 5x^3 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{4}x$$

určete všechny reálné kořeny tohoto polynomu, a to včetně případných násobností. (6 bodů)

3A. Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno $a + b = |BC| + |AC|$, $c = |AB|$ a $\gamma = |\angle ACB|$.

- Proveďte náčrt, rozbor a napište postup konstrukce.
- Diskusi proveďte pouze kvalitativně (tj. uveďte a zdůvodněte, jaký počet řešení může daná úloha mít; závislost počtu řešení úlohy na volbě hodnot zadaných parametrů diskutovat nemusíte).
- Zvolte si konkrétní hodnoty zadaných rozměrů tak, aby měla úloha alespoň jedno řešení a ve zvolené situaci všechna řešení vyřískejte.

(6 bodů)

3B. Najděte osu mimoběžek

$$p = \{[-6 + t; -5 + 2t; -15 + 6t], t \in \mathbb{R}\} \quad \text{a} \quad q = \{[-1 - 2s; 8 + 2s; -5 - 3s], s \in \mathbb{R}\} .$$

Určete i průsečíky hledané osy s každou ze zadaných mimoběžek a vypočtete vzdálenost přímek p a q . (6 bodů)

4A. Necht' jsou dány funkce

$$f : y = \log_3(x - 1) \quad \text{a} \quad g : y = -\sqrt{x - 6} + 4.$$

Do jednoho obrázku načrtněte věrně jejich grafy (vyznačte v nich důležité body, případné prvky souměrnosti, průsečíky se souřadnicovými osami) a určete jejich definiční obory a obory hodnot. Na základě těchto grafů najděte všechna řešení rovnice

$$\log_3(x - 1) = -\sqrt{x - 6} + 4.$$

Zdůvodněte přitom, proč má tato rovnice Vámi uváděný počet řešení. (5 bodů)

4B. V $\mathbb{R}^2$ vyřešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \sqrt{5x} \cdot \sqrt[5]{2y} &= 20, \\ xy &= 20. \end{aligned}$$

(5 bodů)

5A. Určete střed a poloměr kulové plochy

$$\kappa : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y + 4z - 4 = 0.$$

Dále najděte všechna $d \in \mathbb{R}$, pro něž platí, že průnikem roviny

$$\rho : 2x - 3y - 6z + d = 0$$

a kulové plochy κ je kružnice o poloměru 4. (4 body)

5B. V $\mathbb{C}$ vyřešte rovnici

$$z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Kořeny této rovnice znázorněte věrně v Gaussově rovině (stačí náčrt s popisem polohy důležitých bodů a jejich správné znázornění v odpovídajících kvadrantech) a pojmenujte útvar, jehož vrcholy všechny kořeny řešené rovnice tvoří. (4 body)

6A. Čísla a_1 , a_2 , a a_3 , jejichž součet je 18, tvoří první tři členy aritmetické posloupnosti. Čísla $a_1 + 8$, a_2 , a a_3 tvoří první tři členy geometrické posloupnosti. Vypočtěte a_1 , a_2 , a a_3 . Najděte všechna řešení. (5 bodů)

6B. Uvažujme funkci

$$f : y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Vyšetřete

- (a) intervaly monotonie a všechny lokální extrémy funkce f ,
- (b) intervaly, v nichž je funkce f konvexní, resp. konkávní a najděte všechny její inflexní body.

(5 bodů)